Exemple de forme quadratique avec la trace

ma_tilde

Théorème : Soit $q : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto tr(M^2)$.
q est une forme quadratique non dégénérée de rang n^2 et de signature $sign(q) = (\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$.
De plus $S_n(\mathbb{R})^{\perp} = A_n(\mathbb{R})$.

Preuve :

Forme quadratique : Posons $\varphi : (M, N) \mapsto \frac{1}{2}(q(M+N) - q(M) - q(N))$. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(M, N) &= \frac{1}{2}(tr(M+N)^2 - tr(M^2) - tr(N^2)) \\
&= \frac{1}{2}(tr(M^2) + tr(MN) + tr(MN) + tr(N^2) - tr(M^2) - tr(N^2)) \\
&= \frac{1}{2}(tr(MN) + tr(MN))
\end{aligned}$$

Ainsi, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $q(M) = \varphi(M, M)$. Comme φ est une forme bilinéaire symétrique, on en conclu alors que q est une forme quadratique de forme polaire φ.

Etude de la réduction de Gauss : Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned}
q(M) &= \sum_{i=1}^{n} (M^2)_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} m_{j,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2 m_{i,j} m_{j,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{1}{2}(m_{i,j} + m_{j,i})^2 - \frac{1}{2}(m_{i,j} - m_{j,i})^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (m_{i,j} + m_{j,i})^2 - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (m_{i,j} - m_{j,i})^2
\end{aligned}$$

On définit alors pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$:
• $L_{i,i} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto m_{i,i}$

• $L_{i,j} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto m_{i,j} + m_{j,i}$ si $i < j$
• $L_{i,j} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto m_{j,i} - m_{j,i}$ si $i > j$
Ces applications sont des formes linéaires qui sont linéairement indépendantes et vérifiant :

$$q(M) = \sum_{i=1}^{n} L_{i,i}(M)^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} L_{i,j}(M)^2 - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} L_{j,i}(M)^2$$

On a ainsi obtenu la réduction de Gauss de q. Le nombre de formes linéaires positives est $n + \frac{(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Le nombre de formes linéaires négatives est $\frac{n(n-1)}{2}$. On en conclut que :
•$sign(q) = (\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$
•$rg(q) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2$
• q est non dégénérée (car $rg(q) = dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)

Étude de $S_n(\mathbb{R})^\perp$: Soient $(M, N) \in A_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$. On a ${}^t(MN) \in A_n(\mathbb{R})$, donc $\varphi(M, N) = \frac{1}{2}(tr(MN) + tr(NM)) = 0$ (les coefficients diagonaux d'une matrice diagonale sont nuls). Ceci étant vrai pour $N \in S_n(\mathbb{R})$ fixé mais quelconque, on en déduit que $M \in S_n(\mathbb{R})^\perp$. D'où $A_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})^\perp$.

De plus, φ est non dégénérée donc, comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$, $dim(S_n(\mathbb{R})^\perp) = dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) - dim(S_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2} = dim(A_n(\mathbb{R}))$. On a finalement $A_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R})^\perp$.